MODELACIÓN MATEMÁTICA Y ANÁLISIS DEL RUMBO DEL BUQUE

José Enrique Martel Delgado
CID-NAV Cuba

RESUMEN

Se trata la modelación matemática, simulación y análisis del comportamiento del movimiento del buque en el plano horizontal, específicamente se caracteriza el movimiento no estacionario del buque durante la maniobra. Dada la importancia que tiene el proceso de control del rumbo por la desviación que sufre el buque durante su movimiento y el papel primordial que los órganos de gobierno juegan en su control y estabilización, se caracterizan e identifican aquellos parámetros hidrodinámicos influyentes en la dinámica de movimiento del buque. Durante el análisis y simulación se utilizan técnicas conocidas de la teoría moderna de control automático, así como herramientas computacionales reconocidas internacionalmente: MATLAB y su simulador SIMULINK permiten determinar el grado de estabilidad y control del rumbo del buque, mediante la evaluación de la función de coste.

INTRODUCCIÓN

En los límites del trabajo se asume que todas las maniobras del buque se consideran planos y se producen en el plano horizontal. La dirigibilidad del buque se caracteriza por su capacidad de conservar o variar la dirección de su movimiento con la ayuda de los órganos de gobierno. El aseguramiento de la dirigibilidad del buque está dado por el cumplimiento de las maniobras. Cada maniobra se caracteriza con los parámetros de movimiento del buque, o sea, la velocidad de marcha, rumbo, asiento, balanceo, ángulo de ataque, corrimiento, entre otros.

La calidad de la dirigibilidad se caracteriza por la estabilidad del movimiento y maniobra (agilidad) por rumbo (curso). Esta estabilidad está caracterizada por la capacidad del buque de conservar los parámetros de movimiento constantes y su maniobrabilidad - por la capacidad de sus cambios.

El movimiento del buque durante diferentes maniobras se divide en dos grupos: Estacionario y no estacionario. Si todos los parámetros de movimiento y sus derivadas son constantes en el tiempo durante la maniobra, el buque desarrolló un *movimiento estacionario*. Si los parámetros del movimiento no satisfacen las condiciones indicadas, entonces el *movimiento es no estacionario*.

Las maniobras dadas se producen a costa de las acciones de las fuerzas en el buque, por uno u otro medio, que garantizan la maniobrabilidad. El medio mas universamente difundido para garantizar la dirigibilidad son los timones y estabilizadores.

En el presente trabajo se aborda el movimiento no estacionario del buque en el plano horizontal. En la composición de las fuerzas y momentos, actuantes en el movimiento no estacionario por el rumbo, entran todas las componentes hidrodinámicas e inerciales. Sin embargo este sistema de ecuaciones en el plano horizontal es bastante complejo.

La posibilidad y precisión de estas maniobras se determinan de forma general por las propiedades dinámicas del buque, y en primer lugar su maniobrabilidad, dirigibilidad y estabilidad. Estas propiedades están interrelacionadas y dependen de las dimensiones, masas y formas del cuerpo.

Un indicador cualitativo de las diferentes maniobras del buque se determina por sus aceleraciones angulares. Durante el movimiento el buque está subordinado a diferentes géneros de acciones perturbadoras que violan el equilibrio de las fuerzas y momentos, como resultado de ello el buque se desvía del régimen de movimiento inicial calculado.

Similares desviaciones también surgen a costa de los diferentes parámetros del cuerpo y de las características del mismo, así como de su sistema de dirección y control, respecto a los valores obtenidos durante el diseño para la condiciones de cálculo.

En la teoría de estabilidad el régimen calculado se denomina *movimiento no perturbado*. El surgimiento del movimiento con relación al calculado se denomina *perturbado*.

Si el movimiento del buque por rumbo, por la acción de fuerzas perturbadoras exteriores, se desvía del movimiento no perturbado y si después de concluir la acción de la fuerza perturbadora el buque retorna al régimen de movimiento inicial, entonces estaríamos hablando de un *movimiento no perturbado estable*. Si después de concluir la acción de la fuerza perturbadora, el cuerpo no retorna al régimen de movimiento inicial, entonces el *movimiento no perturbado es inestable*.

Precisamente producto de la deriva el buque no mantiene el rumbo y se desvía del mismo. Para corregir el rumbo perdido hay que ejecutar acciones de control con los sistemas de gobierno.

En el trabajo se hace referencia a este último caso: *movimiento no perturbado inestable.*

Para el estudio y análisis del rumbo del buque se realiza la modelación matemática.

El modelo matemático del buque, como un sistema dinámico, se define como un conjunto de ecuaciones diferenciales y algebraicas, que reflejan la dinámica del mismo en movimiento con una determinada exactitud. Este modelo matemático se obtiene de las leyes de la física que rigen el comportamiento del buque en el plano

horizontal. La deducción del modelo matemático es la etapa más importante.
Para su estudio el modelo matemático fue representado en ecuaciones diferenciales, en variables de estado y funciones de transferencias. Cada uno de ellos es utilizado en dependencia de las circunstancias y objetivos de la tarea de control. La representación en variables de estado se utiliza para la simulación y comprobación de la estabilidad asintótica, empleándose para ello el segundo principio de *Liapunov* para el análisis de la estabilidad en el dominio del tiempo. La representación en funciones de transferencia en el dominio de frecuencias permite analizar y predecir el comportamiento dinámico del buque durante la maniobra y el gobierno por rumbo.
Del resultado de la modelación matemática se da paso al empleo de diferentes herramientas computaciones, para el procesamiento de análisis - síntesis.
Durante la modelación matemática de determinado comportamiento del buque en movimiento en movimiento se busca la mayor exactitud posible incrementando su complejidad, logrando incrementar el número de ecuaciones para una descripción más completa. Sin embargo se logra buscar un equilibrio entre la simplicidad del modelo y la exactitud del resultado del análisis. En el trabajo de investigación se logran modelos razonablemente simplificados, que a pesar de ello describen el comportamiento del buque en las condiciones requeridas.
En el presente trabajo se demuestra que el rumbo del buque debe ser controlado y deben para ello existir sistemas de gobierno capaces que cumplir requisitos de “bueno, bonito y barato”. Disminuir el esfuerzo del sistema de gobierno para controlar el buque por rumbo es la tarea más importante que desarrolla la teoría de control aplicada.

MODELO MATEMÁTICO DEL MOVIMIENTO DEL BUQUE EN EL PLANO HORIZONTAL

Fuerzas y momentos que actúan sobre el buque

Para obtener el modelo matemático del movimiento del buque en el plano horizontal es necesario conocer las fuerzas y momentos que actúan sobre el mismo:

- Fuerzas y momentos hidrostáticos de género no inercial, condicionados por la viscosidad del agua.
- Fuerzas y momentos inerciales, condicionados por la inercia propia del buque y del agua que circunda al buque en movimiento.

Estos dos grupos de fuerzas y momentos actúan en el buque en el movimiento no estacionario.
Entre las fuerzas y momentos hidrodinámicos no inerciales se encuentran:
La fuerza de empuje del propulsor y su momento - Se considera que la línea de ejes es paralela al eje principal y al plano diametral y por consiguiente al eje longitudinal. Entonces la fuerza de propulsión (Pe) se proyecta en el eje GX y no origina un momento con relación al centro de gravedad en el plano horizontal.
La fuerza y momento hidrodinámicos de posición - Durante el movimiento del buque sobre la superficie mojada actúan fuerzas tangenciales. La suma de estos esfuerzos en los planos longitudinal, vertical y horizontal da el vector resultante de las fuerzas hidrodinámicas de posición, que tienen como punto de aplicación el centro de presión.
Las Fuerzas y momentos que actúan en el plano horizontal son:

$$X_p(\beta,\delta) = 0{,}5C_{xp}(\beta,\delta)\rho V^2 LT \qquad (1)$$

$$Y_p(\beta,\delta) = 0{,}5C_{yp}(\beta,\delta)\rho V^2 LT \qquad (2)$$

$$M_{zp}(\beta,\delta) = m_{xp}(\beta,\delta)qLT \qquad (3)$$

donde :
L - Eslora del buque por la línea de flotación.
T - Calado medio del buque.
Cxp, Cyp, mp - Coeficientes hidrodinámicos adimensionales longitudinal, lateral y del momento de deriva del buque.

Componentes de rotación y magnitudes totales de las fuerzas y momentos no inerciales.

Durante el movimiento del buque por una trayectoria curvilínea en el plano horizontal, la resultante de las fuerzas y los momentos hidrodinámicos dependen no sólo de los ángulos Β y δ, sino también de sus correspondientes componentes de velocidad angular. Es por ello que la magnitud total de las fuerzas hidrodinámicas y sus momentos son funciones de los parámetros :

$$X_{wz} = 0{,}5C_x^{wz}\rho v V_n \omega_z \qquad (4)$$

$$Y_{wz} = 0{,}5C_y^{wz}\rho v V_n \omega_z = 0{,}5C_y^{wz}\rho v^2 V_n^{2/3}\omega_z \qquad (5)$$

(6)

$$Mz_{wz} = 0{,}5 m_z^{wz} \rho v V^{4/3} w_z = 0{,}5 m_z^{wz} \rho v^2 V_n w_z$$
$$\omega_z = \omega_z V_n^{1/3} / v \qquad (7)$$

El cálculo total de las fuerzas y momentos hidrodinámicos no inerciales es igual a :

$$X = X_p(\beta,\delta) + X_{wz}(\omega z) \qquad (8)$$
$$Y = Y_p(\beta,\delta) + Y_{wz}(\omega z) \qquad (9)$$
$$M_z = M_{zp}(\beta,\delta) + M_{Z\omega z}(\omega_z) \qquad (10)$$

Las expresiones para el cálculo de las fuerzas y momentos inerciales son :

$$X_i = -m\left[(1+k_{11})\frac{dv}{dt} + (1+k_{22})v\omega\beta\right] \qquad (11)$$
$$Y_i = m\left[(1+k_{22})v\frac{d\beta}{dt} - (1+k_{11})v\omega\right] \qquad (12)$$
$$M_{zi} = -I_z(++k_{66})\frac{d\omega}{dt} \qquad (13)$$

MOVIMIENTO DEL BUQUE DURANTE LA MANIOBRA POR RUMBO

En la composición de las fuerzas y momentos que actúan durante el movimiento no estacionario por rumbo, entran las componentes hidrodinámicas vistas anteriormente para el plano horizontal y también las fuerzas de inercia.

El sistema de ecuaciones de movimiento tiene la forma siguiente:

$$Pe - X_p + X_i = 0 \qquad (14)$$
$$Y_p + Y_i + Y_\omega = 0 \qquad (15)$$
$$M_i + M_{zp} + M_{Z\omega} = 0 \qquad (16)$$

donde :

Pe - Empuje del propulsor
Xp, Yp, Mzp - Fuerzas hidrodinámicas longitudinal, lateral y momento de posición
Yw, Mzw - Fuerza y momento de las componentes rotatorias
Xi, Yi, Mi - Fuerzas inerciales longitudinal, lateral y momento de inercia.

Finalmente el modelo matemático queda en la forma siguiente:

$$Pe - 0{,}5 C_{x0}\rho v^2 LT - \rho V(1+k_{11})\frac{dv}{dt} - \rho V(1+k_{22})v\omega\beta = 0 \qquad (17)$$
$$0{,}5\left[C_y^\beta \beta + C_y^\delta \delta\right]\rho V^2 LT + 0{,}5 C_y^\omega \rho v L^2 T\omega - \rho V(1+k_{22})\frac{d\beta}{dt} - \rho V(1+k_{11})v\omega = 0 \qquad (18)$$
$$-I(1+k_{66})\frac{d\omega}{dt} + 0{,}5\left[m_z^\beta \beta + m_z^\delta \delta\right]\rho v^2 L^2 T + 0{,}5 m_z^\omega \rho v L^3 T\omega = 0 \qquad (19)$$

Después de algunas transformaciones matemáticas se obtienen las siguientes expresiones:

(20)

$$\overset{0}{\beta} - \frac{0{,}5C_y^{\beta} vLT}{V(1+k_{22})}\beta - \frac{\left[0{,}5C_y^{\omega} L^2 T - V(i+k_{11})\right]}{V(1+k_{22})}\omega = \frac{C_y^{\delta} vLT}{V(1+k_{22})}[\delta]$$

$$\overset{0}{\omega} - \frac{0{,}5m_z^{\beta} \rho v L^3 T}{I(1+k_{66})}\omega - \frac{\left[0{,}5m_z^{\beta} \rho v^2 L^2 T\right]}{I(1+k_{66})}\beta = \frac{0{,}5m_z^{\delta} \rho v^2 L^2 T}{I(1+k_{66})}[\delta] \tag{21}$$

Sustituyendo los valores numéricos de los coeficientes en las expresiones (20), (21) se obtiene:

$$\overset{0}{\beta} - 1{,}12\beta - 7{,}23\omega = -1{,}51[\delta] \tag{22}$$

$$\overset{0}{\omega} + 7638{,}4\omega + 7638{,}4\beta = 3551{,}187[\delta] \tag{23}$$

El sistema de ecuaciones puede ser expresado directamente a través de la variación del ángulo de curso (rumbo), teniendo en cuenta que:

$$\omega_Z(\omega) = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \tag{24}$$

Entonces:

$$\frac{d^3\varphi}{dt^3} + 61.25\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 381.8\frac{d\varphi}{dt} = 28.75\frac{d\delta}{dt} + 62.5\delta \tag{25}$$

La expresión (25) es una ecuación de tercer grado que caracteriza la dinámica del movimiento del buque por rumbo. En ella no existe término independiente por tanto la desviación del rumbo no será corregido, si no es con ayuda de los órganos de gobierno.

La función de transferencia que relaciona el ángulo de curso como variable de salida con relación al ángulo de timón como variable de entrada es la siguiente:

$$G(s) = \frac{\varphi(s)}{\delta(s)} = \frac{(28.75s + 62.2)}{s(s^2 + 61.25s + 381.8)} \tag{26}$$

Las raíces de la ecuación característica son:

$$S_{polos} = \begin{Bmatrix} s_1 = 0 \\ s_2 = -7{,}04 \\ s_3 = -54.20 \end{Bmatrix} \tag{27}$$

Las raíces del numerador es la siguiente:

$$S_{cero} = -2.17 \tag{28}$$

El buque puede ser controlado por rumbo a pesar de tener un cero y un polo en el semiplano positivo, ya que los mismos prácticamente se cancelan.

Sin embargo la raíz (polo negativo) tan lejano del eje, indica que el sistema debe hacer un gran esfuerzo para controlar la desviación del rumbo y un aumento infinito de la ganancia producirá fuertes oscilaciones en el plano horizontal del rumbo del buque.

La dinámica de movimiento del buque por rumbo es más conveniente pasar al dominio del tiempo en la representación de la ecuación Vector - matricial de estado (variable de estado) siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} \\ \ddot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -381.8 & -61.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \omega \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 28.75 \\ -1698.4 \end{bmatrix} \delta \tag{29}$$

$$Y = [100]\begin{bmatrix} \varphi \\ \omega \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} \tag{30}$$

La expresión (30) corresponde a la señal de salida. Con esta expresión se pretende obtener el vector de ganancia óptima para garantizar una ley de control de los timones del buque para la regulación de la desviación del rumbo durante el movimiento mediante la **retroacción** del estado:

$$u = -kx \tag{31}$$

que sea capaz de **reconducir** las condiciones iniciales X(0) provocadas por las perturbaciones transitorias, a su estado de reposo de modo tal que minimice el criterio de calidad (Función de coste) siguiente :

$$J = 1/2\int_0^{\infty} (x^T QX + u^T ku)dt \tag{32}$$

donde :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \therefore k = 1 \tag{33}$$

Por tanto el criterio a minimizar se expresa del modo siguiente :

$$J = \int_0^{\infty} (x^2 + u^2)dt \tag{34}$$

Para ello se debe resolver la ecuación de **Riccati** siguiente:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \tag{35}$$

Con ayuda del MATLAB se soluciona esta ecuación matricial y se obtiene por el comando LQR el vector de ganancia de la ley de control del timón del buque.

$$K = [1 \quad 0{,}1535 \quad 0.0025] \tag{36}$$

Conociendo que la desviación media del buque por el rumbo es de 2º, entonces:

$$X[0] = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{37}$$

$$P = \begin{bmatrix} 5.8211 & 0.9117 & 0.0148 \\ 0.9117 & 0.1446 & 0.0024 \\ 0.0148 & 0.0024 & 0 \end{bmatrix} \tag{38}$$

y la función de Coste es igual a :

(39)

$$J = 0,5\begin{bmatrix}200\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5.8211 & 0,9117 & 0.0148 \\ 0,9117 & 0,1446 & 0.0024 \\ 0.0148 & 0.0024 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cong 11.64$$

Por tanto la ley de control del rumbo del buque es :

$$\delta = \begin{bmatrix} \varphi \\ \omega \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = -\varphi - 0.1535\omega - 0.0025\dot{\omega} \qquad (40)$$

Como puede observarse para controlar el rumbo del buque hace falta sensar la desviación angular y la velocidad angular en el plano longitudinal, y observar un coeficiente transferencial del sensor de velocidad angular y los mecanismos de timones de 0.1535 grad. timón/grad./seg. y del sensor angular de 1 grad. timón /grad. buque
El valor de esta función de Coste (J) obtenido permite decir que el sistema de gobierno calculado es óptimo, para las exigencias establecidas.

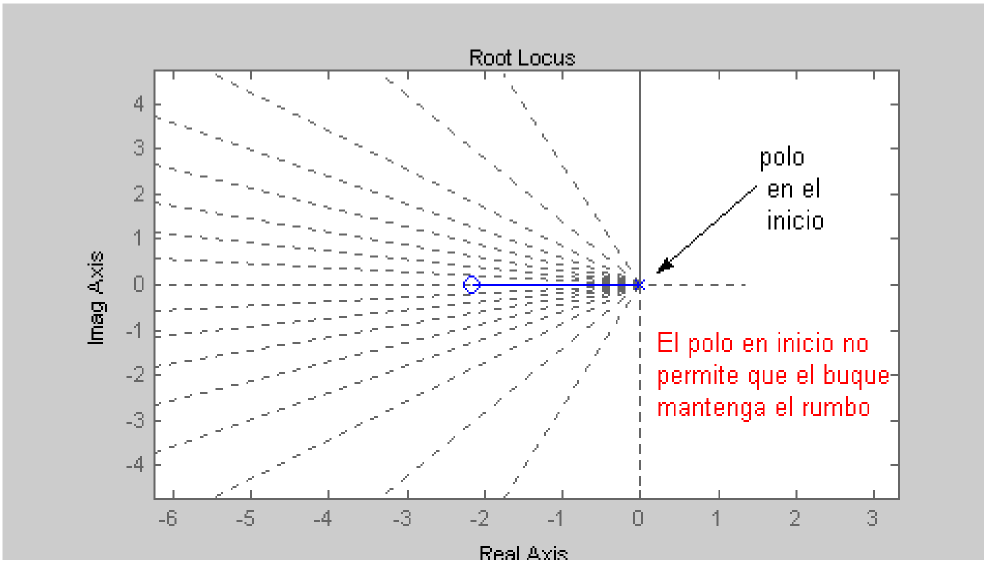
CONCLUSIONES

Para garantizar el control del rumbo del buque es necesario durante la etapa de anteproyecto realizar la modelación y simulación de la dinámica del movimiento con el fin de determinar la ley de control.
La solución de la tarea de control proporciona la facilidad de establecer las exigencias a los sensores, que cumplen con los requisitos de dirigibilidad del buque.
En el CIDNAV se realiza durante la etapa de proyecto la modelación y simulación del movimiento en el plano horizontal, lo que permite conocer las posibilidades de maniobra del buque.

BIBLIOGRAFÍA

1. Ageev M.D: Equipos automáticos subacuáticos. Sudostroenie. Leningrado, 1981
2. Droblenkov V.I y Otros: Prontuario de Teoría del buque. VoenIzdat. Moscú, 1984
3. Greshilov, A.A: Análisis y síntesis de sistemas estocasticos. Radio y Svyaz. Moscú, 1990
4. Herranz, J: Simulación y Control de sistemas dinámicos (II).Control Modal y Control Optimo. .ISPJAE. La Habana,1995
5. Hernández Costa, Víctor Alfonso. : Obtención de las características de comportamiento en el mar de embarcaciones atípicas. Habana. 2001.
6. Shahiam Bahran y Hassul Michael. Control system using Matlab. Prentice Hall. 1994.

ANEXOS.



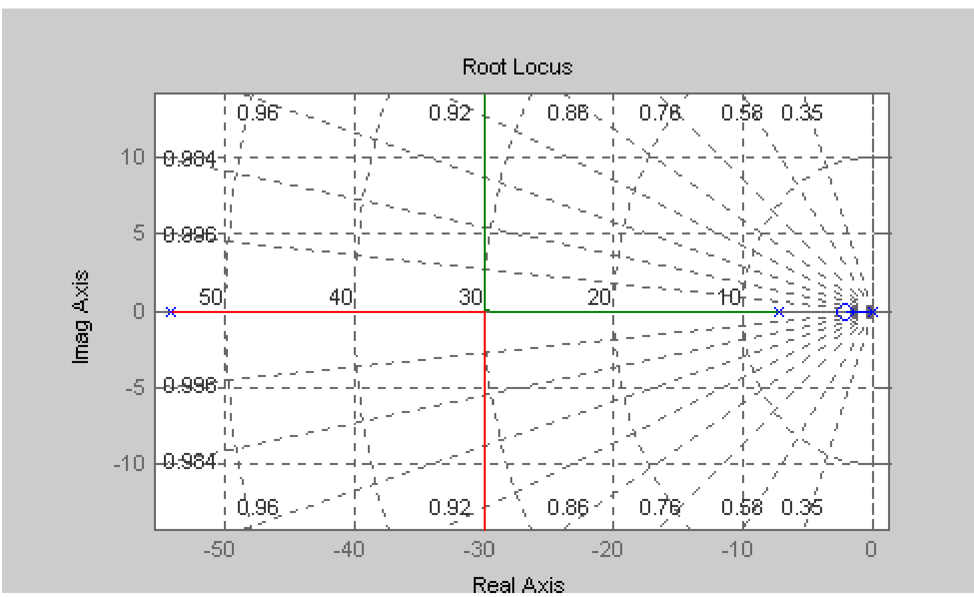


Fig.1 LUGAR GEOMETRICO DE RAICES SIN CONTROL

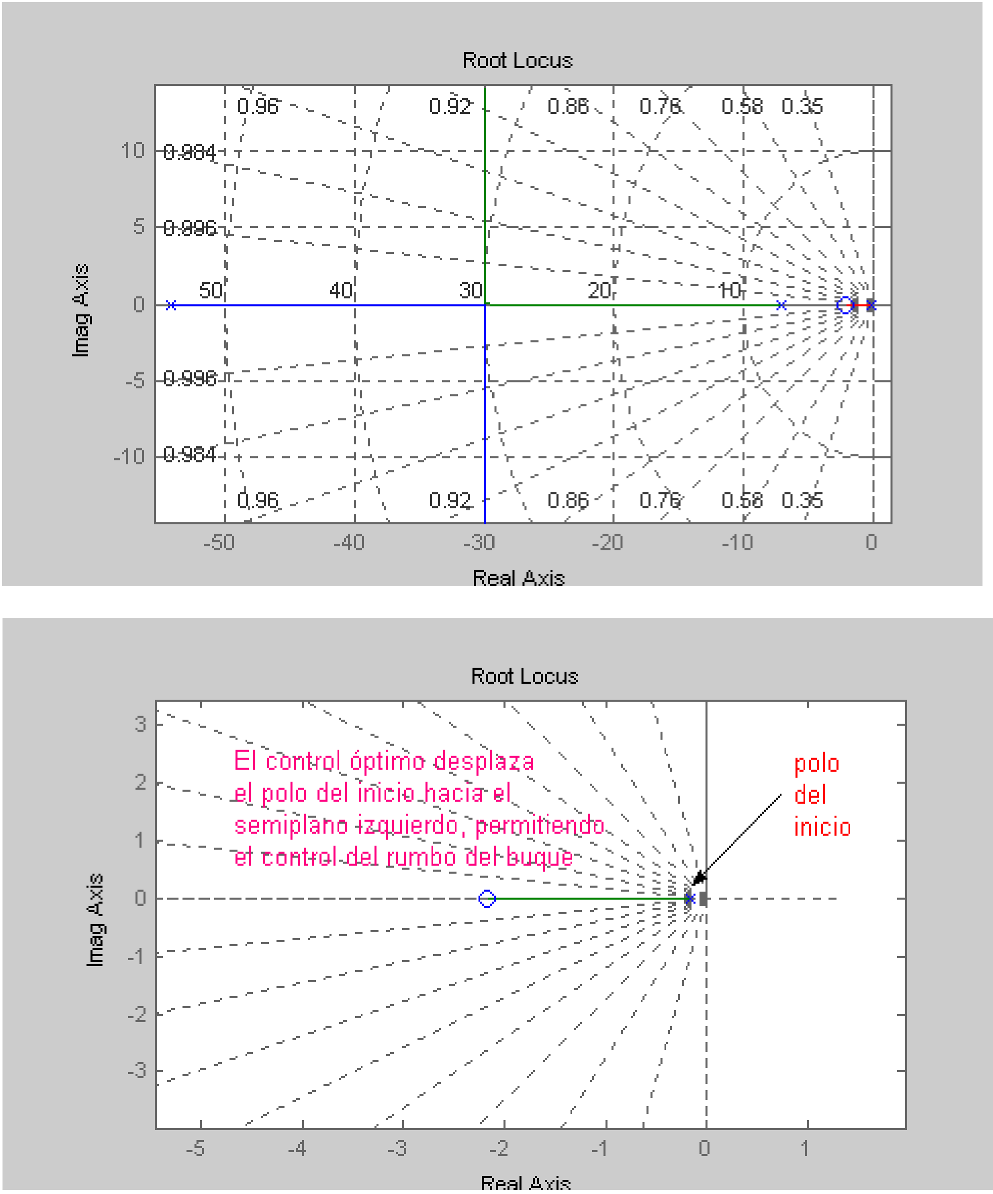


Fig.2. LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES CON CONTROL OPTIMO LQR.

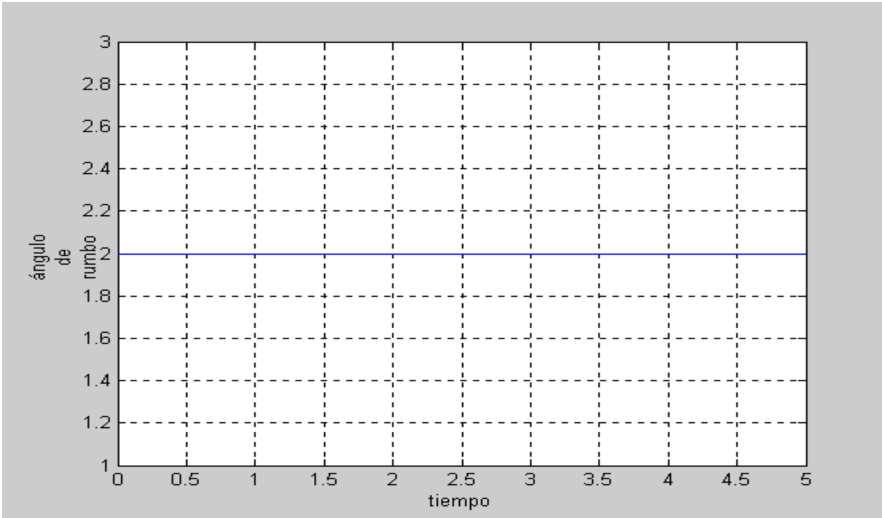


Fig.3 Desviación del rumbo del buque sin control óptimo.

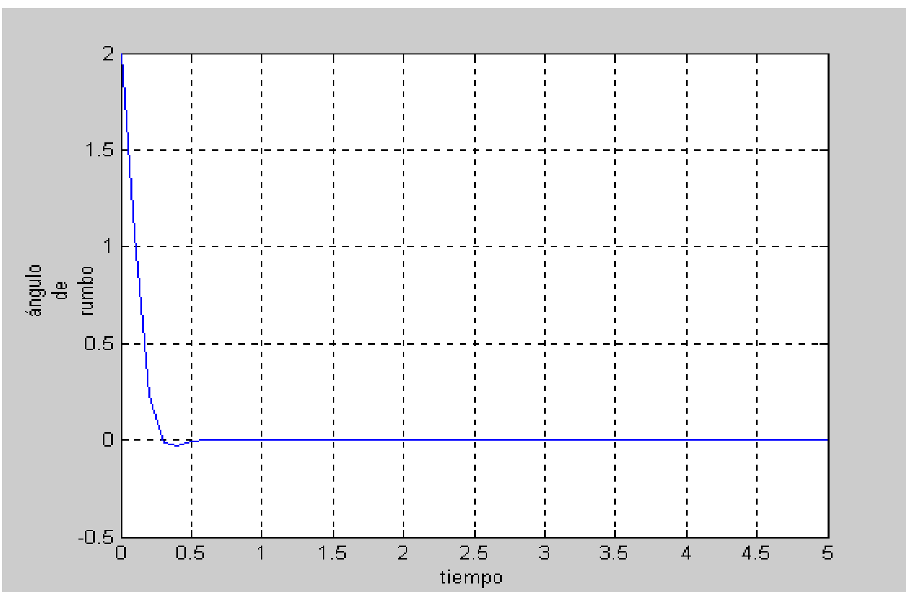
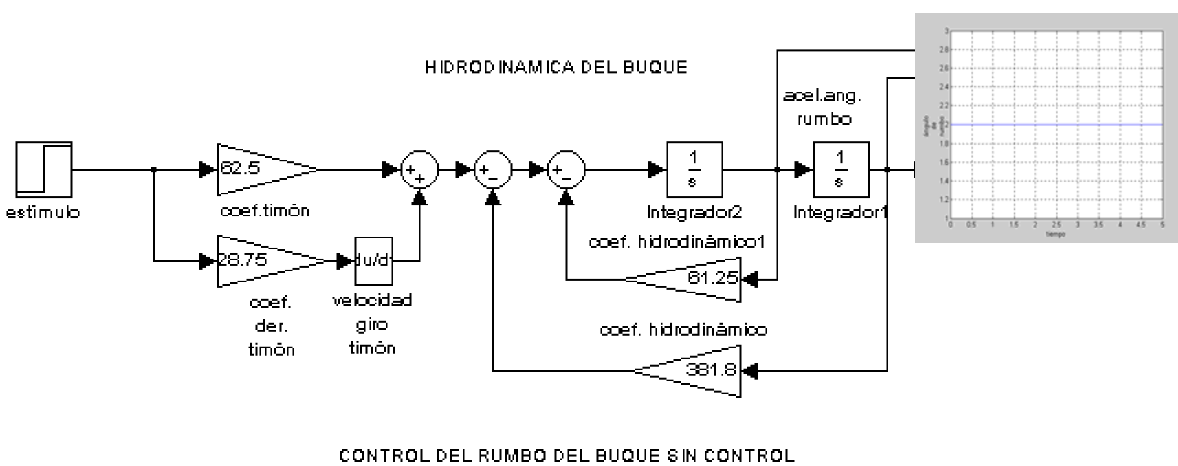
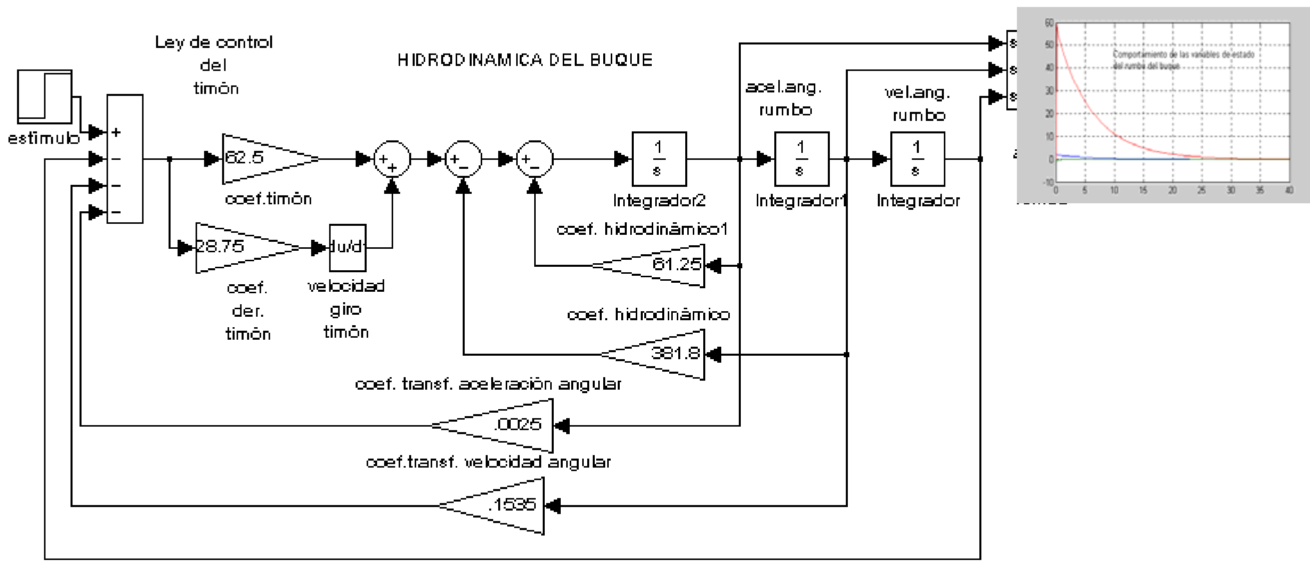


Fig.3. Rumbo del buque controlado por un regulador lineal cuadrático.





CONTROL DEL RUMBO DEL BUQUE CON UN CONTROL OPTIMO LQR.

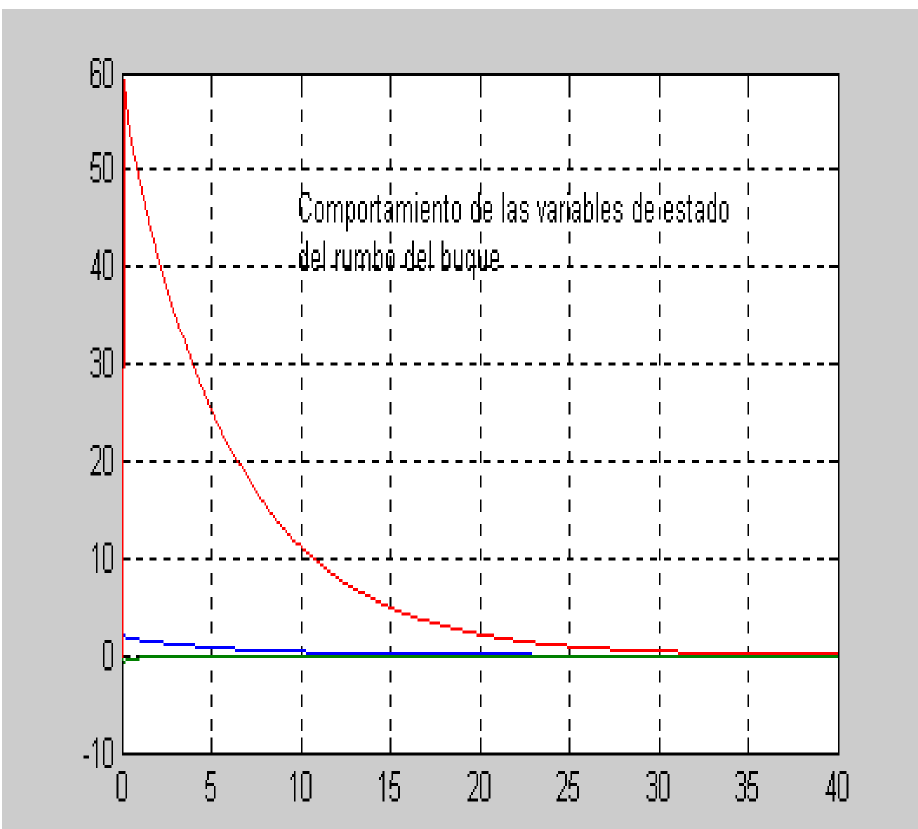


Fig. 4. Comportamiento de las variables de estado del buque. (ángulo de rumbo, velocidad angular y aceleración angular).

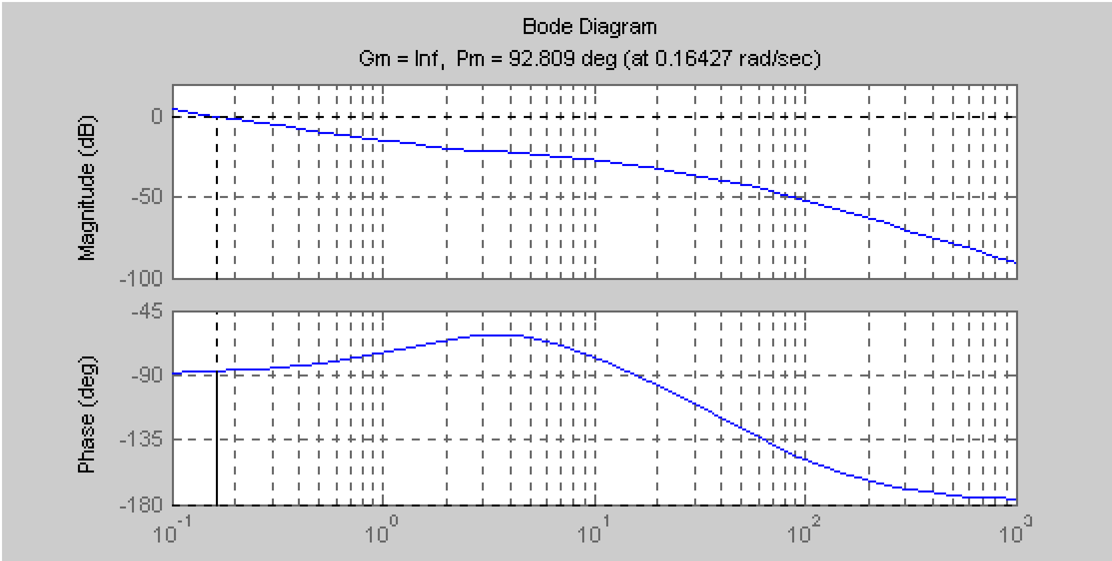


Fig.5 Márgenes de ganancia y de fase del buque sin control.

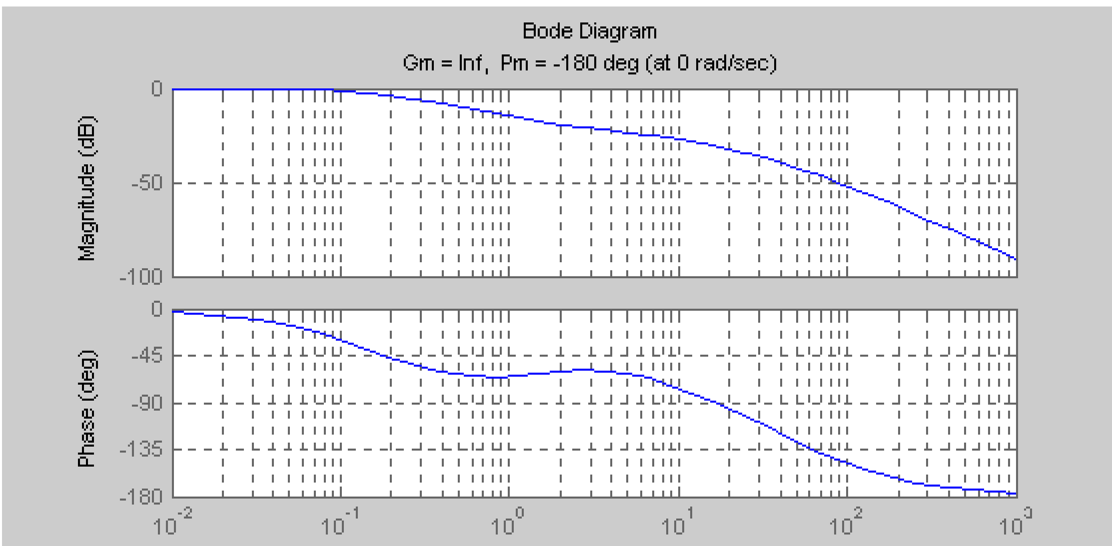


Fig.6. Márgenes de ganancia y de fase del buque controlado.