

**XIX CONGRESO PANAMERICANO DE INGENIERIA NAVAL,  
TRANSPORTE MARITIMO E INGENIERIA PORTUARIA**

**INTERPRETACIÓN DE ALGUNAS FORMULACIONES  
ESTRUCTURALES EMPLEADAS POR UNA SOCIEDAD DE  
CLASIFICACIÓN**

**José R. Marín<sup>1</sup>, y Mario J. Franco<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Ph.D., Profesor, [jmarin@espol.edu.ec](mailto:jmarin@espol.edu.ec), <sup>2</sup>Estudiante Ing. Naval, [mfranco@espol.edu.ec](mailto:mfranco@espol.edu.ec),  
Fac. Ingeniería Marítima y CC. del Mar, ESPOL, Guayaquil, Ecuador

**RESUMEN**

Se discute la estrecha relación entre las expresiones que resuelven los problemas clásicos del análisis estructural: flexión de vigas simplemente soportadas, SS, y empotradas, flexión de planchas SS y empotradas, pandeo de columnas y planchas, y, ancho efectivo, con las formulaciones encontradas en las reglas de una sociedad de clasificación. Para ello se describen matemáticamente las ecuaciones diferenciales que resumen los problemas de equilibrio mencionados, sus condiciones de frontera y términos independientes de carga, el proceso analítico, hasta llegar a su solución. Posteriormente se manejan dimensionalmente las expresiones resultantes hasta obtener ecuaciones paralelas a las provistas por una sociedad de clasificación. Se espera que este trabajo ayude a los estudiantes de Ingeniería Naval a confiar en la utilidad del esfuerzo analítico desarrollado en clase para obtener la solución de problemas de Análisis Estructural. También se espera que los jóvenes Ingenieros Navales puedan “ver” la física del problema detrás de las formulaciones recomendadas por las Sociedades de Clasificación. Es posible también aprender de este análisis el orden de magnitud de los Factores de Seguridad que están incorporados en las formulaciones de las sociedades de clasificación.

**GUAYAQUIL, ECUADOR  
OCTUBRE 2005**

La ecuación diferencial que refleja el equilibrio de cada elemento diferencial de viga es:

$$EIv_{,xxxx} = p(x) \quad (1)$$

Donde E es el módulo de Young, I, la inercia seccional,  $v(x)$ , es la función desplazamiento vertical (+ hacia arriba), y,  $p(x)$  es la función que describe la carga aplicada por unidad de longitud, en este caso, uniformemente distribuida:  $p(x) = -p_0$ . El subíndice implica diferenciación espacial respecto de x. Dado que se trata de una viga Simplemente Soportada, las condiciones de frontera que deben satisfacerse son:

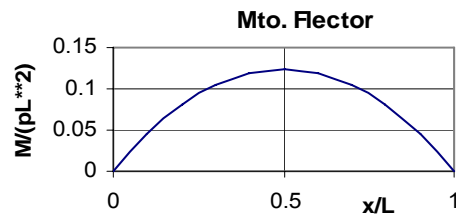
Para  $x=0$  y para  $x=L$ :  $v = 0, y, v_{,xx} = 0$ .

Resolviendo la ecuación diferencial se encuentra  $v(x)$ , y a través de ella se llega al momento flector, [3]:

$$M_z(x) = EIv_{,xx} = -\frac{p_0x^2}{2} + \frac{p_0Lx}{2} \quad (2)$$

Graficando el momento flector, véase la siguiente figura, se nota que el máximo momento se da en  $L/2$ , y tiene un valor de:

$$M_{max} = \frac{p_0L^2}{8}$$



**Figura 2.-** Distribución de Momento Flector en viga con extremos S. soportados

El esfuerzo máximo en una sección transversal de la viga se calcula por:

$$\sigma = \frac{cM}{I} = \frac{M}{S} \quad (3)$$

Donde c es la distancia vertical a la fibra más alejada, y el cociente  $I/c$ , módulo Seccional, se puede calcular, para un esfuerzo de trabajo dado:

**1. INTRODUCCION**

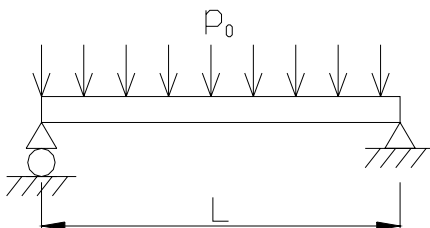
Cuando se inicia con el uso de las reglas de Construcción y Clasificación para seleccionar los escantillones de una embarcación, se tiene la impresión de que se están usando un grupo de "cajas negras": dimensiones entran por un extremo, y por el otro salen los escantillones de los estructurales requeridos. En cambio, cuando en un curso de Ingeniería se presentan los conceptos sobre análisis estructural, se resuelven analíticamente problemas diferenciales de equilibrio y se deducen expresiones para establecer Fuerzas Internas, Esfuerzos y Deformaciones. Sin embargo, al final se utilizan las reglas de construcción, y los resultados del análisis estructural parecen estériles.

En el presente trabajo se pretende establecer una relación entre las formulaciones deducidas según los procesos analíticos clásicos, y algunas de las formulaciones empleadas por las reglas de una sociedad de clasificación. Se escogió las reglas de la DNV por casualidad simple, dado que los autores no guardan ninguna relación con dicha entidad. Tampoco se espera cambios sustanciales respecto de la versión de reglas utilizadas.

**2. SOLUCIONES ANALITICAS**

**2.1. FLEXIÓN DE VIGAS SIMPLEMENTE SOPORTADAS, SS.-**

Se va a considerar una viga simplemente soportada, sometida a carga uniformemente distribuida:

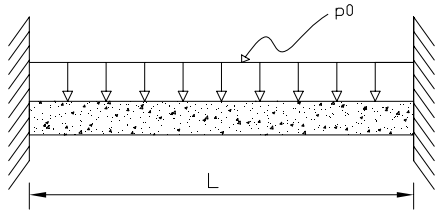


**Figura 1.-** Viga Simplemente soportada con carga uniformemente distribuida

$$S = \frac{p_0 L^2}{8\sigma} \quad (4)$$

## 2.2. FLEXIÓN DE VIGAS EMPOTRADAS

Se va a considerar una viga empotrada en ambos extremos, y sometida a carga uniformemente distribuida:



**Figura 3.-** Viga Empotrada con carga uniformemente distribuida

La ecuación que hay que resolver es la misma que para el caso Simplemente soportada:

$$E I v_{,xxxx} = p(x) \quad (1)$$

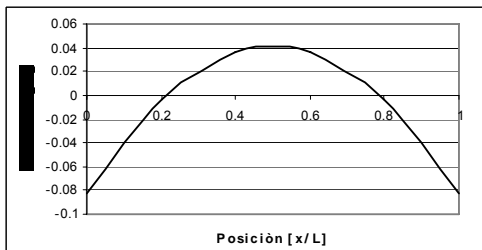
La función que describe la carga distribuida es  $p(x) = -p_0$ , y las condiciones de frontera son, para  $x = 0$  y  $x = L$ :  $v = 0$ ,  $y$ ,  $v_{,x} = 0$ .

Resultando una función momento flector igual a, [3]:

$$M_z(x) = -\frac{p_0 x^2}{2} + \frac{p_0 L x}{2} - \frac{p_0 L^2}{12}. \quad (5)$$

Si se grafica el momento, se observa que los valores máximos se presentan en los extremos, y tienen un valor de:

$$M_{\max} = -\frac{p_0 L^2}{12}$$



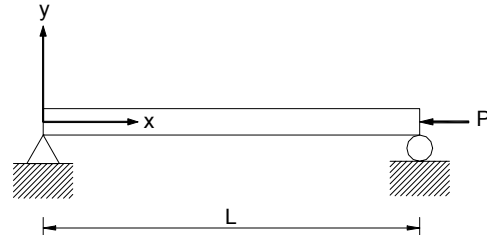
**Figura 4.-** Distribución de Momento Flector en una viga con extremos empotrados

De manera que el Módulo Seccional requerido es igual, aplicando la ecuación (3), a:

$$S = \frac{p_0 L^2}{12\sigma} \quad (6)$$

## 2.3. PANDEO DE COLUMNAS

Se va a calcular la carga crítica que hace pandear una columna, asumida como simplemente soportada:



**Figura 5.-** Columna simplemente soportada en compresión

La ecuación diferencial que se debe resolver en este caso es:

$$E I v_{,xxxx} + P v_{,xx} = 0 \quad (7)$$

Donde P es la carga axial, asumida como compresiva. La solución de dicha ecuación de equilibrio (Homogénea) es, [3]:

$$v(x) = C_1 \text{Sen} \lambda x + C_2 \text{Cos} \lambda x + C_3 x + C_4$$

donde  $\lambda^2 = P/(EI)$ .

Las condiciones de frontera son (SS):

Para  $x = 0$  y  $L$ :  $v = 0$ ,  $y$ ,  $v_{,xx} = 0$

Evaluando las condiciones de frontera, y para que la solución sea no trivial, se encuentra que  $\text{sen} \lambda L = 0$ , esto es,  $\lambda L = i\pi$ , siendo i un entero. Recordando la definición de  $\lambda$ , la carga axial que se debe aplicar para que haya solución no trivial es:

$$P_i = EI \left( \frac{i\pi}{L} \right)^2. \quad (8)$$

El vector principal es:  $v_i(x) = C_i \text{sen} \lambda_i x$ , donde  $\lambda_i = i\pi/L$ . La menor carga axial que produce pandeo es:

$$P_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Dividiendo esta expresión para el área seccional se puede obtener una expresión para el esfuerzo crítico:

$$\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2} \quad (9)$$

Conocida también como fórmula de Euler.

## 2.4. PANDEO DE PLANCHAS SS

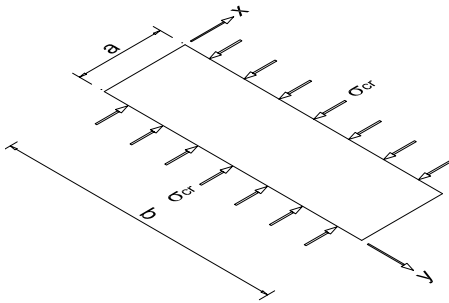
Se va a considerar una plancha rectangular con los bordes simplemente soportados. Primeramente se determina la Energía de Deformación (U) de la plancha, la cual se la calcula considerando el trabajo que desarrollan los momentos internos:  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  y  $M_{yx}$ , [2]:

$$U = \frac{1}{2} \left( \iint M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy$$

Donde  $w(x,y)$  es la función desplazamiento vertical (+ hacia abajo) de un punto (x,y) sobre la plancha.

Las condiciones de frontera son:

$$\begin{aligned} x=0 \text{ y } x=a: & \quad w=0, w_{,xx}=0, \\ y=0 \text{ y } y=b: & \quad w=0, w_{,yy}=0. \end{aligned}$$



**Figura 6.-** Plancha sometida a esfuerzo compresivo en los bordes largos

Utilizando la siguiente función, que satisface los requerimientos anteriores, en forma exacta:

$$w(x,y) = W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

se obtiene la siguiente expresión para la energía de deformación elástica:

$$U = \frac{1}{8} DW_{mn}^2 \pi^4 ab \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2, \quad (10)$$

donde D es la rigidez flexural de la plancha:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)},$$

siendo t el espesor, E el módulo de Young,  $\nu$ , la razón de Poisson.

Luego se calcula el trabajo de la fuerza externa,  $W_e$ , considerando la distancia axial que avanza el extremo de una fibra cuando se deforma lateralmente w, al pandearse:

$$\begin{aligned} du &= ds - dx = \sqrt{1 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} dx - dx \\ &\approx \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \end{aligned}$$

Considerando el movimiento axial del extremo de cada franja de ancho dy, que soporta un esfuerzo en dirección x,  $\sigma_x$ :

$$W_e = \iint_{Area} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] [\sigma_x t dy]$$

Y reemplazando la expresión para el desplazamiento vertical, se llega a:

$$W_e = \frac{1}{8} W_{mn}^2 ab \sigma_x t \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \quad (11)$$

Finalmente se calculará el esfuerzo crítico, por medio de Conservación de Energía:

$$W_e - U = 0$$

Como en todo problema homogéneo, se busca un valor principal, en este caso para el esfuerzo, que haga no trivial la solución, esto es:  $W_{mn} \neq 0$ . Esto conduce a la siguiente expresión para el esfuerzo:

$$\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 D}{b^2 t} \left[ m \frac{b}{a} + \frac{n^2 a}{m b} \right]^2$$

Si se considera una plancha cargada en los bordes más largos la expresión anterior se puede reescribir como:

$$\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 D}{a^2 t} \left[ m + \frac{n^2}{m} \left( \frac{a}{b} \right)^2 \right]^2$$

Para efectos de diseño, se trata de estimar el mínimo esfuerzo compresivo que producirá pandeo en la plancha; este valor

se obtiene tomando ambos índices enteros, m y n, como 1, con lo que se llega a la siguiente expresión para el esfuerzo crítico de la plancha:

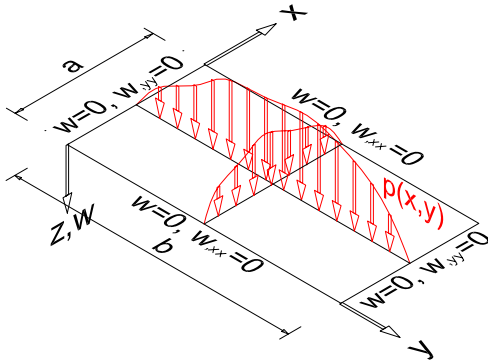
$$\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 D}{a^2 t} \left[ 1 + \left( \frac{a}{b} \right)^2 \right]^2 \quad (12)$$

## 2.5. FLEXIÓN DE PLANCHAS RECTANGULARES CON CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA

**Simplemente Soportada:** en este caso, la ecuación diferencial a resolver es:

$$D\nabla^4 w = p(x,y), \quad (13)$$

que resume el equilibrio de cada elemento de la plancha. En esta expresión, D es la rigidez flexural de la plancha, w es la función desplazamiento vertical (+hacia abajo), y p(x,y) es la carga por unidad de área.



**Figura 7.-** Plancha rectangular simplemente soportada

Las condiciones de frontera en este caso son:

$$\text{para } x=0 \text{ y } x=a: \quad w = 0, \quad w_{,xx} = 0$$

$$\text{para } y=0 \text{ y } y=b: \quad w = 0, \quad w_{,yy} = 0$$

Una función que satisface exactamente todas las condiciones de frontera mencionadas es:

$$w(x,y) = \sum_m \sum_n W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (14)$$

A su vez, considerando la carga como uniformemente distribuida,  $P_0$ , puede expandirse como una serie senoidal de la siguiente forma:

$$p(x,y) = \sum_m \sum_n P_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

donde m y n son enteros impares, y, las amplitudes de los armónicos están dadas por:

$$P_{mn} = \frac{16P_0}{mn\pi^2}.$$

Reemplazando las series para la función solución y para la carga, las amplitudes de los armónicos de la solución están dados por:

$$W_{mn} = \frac{16P_0}{mnD\pi^6 \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}$$

Con esta amplitud, se puede obtener el momento flector máximo, que se presenta en el centro de la plancha y paralelo al eje de menor longitud:

$$\begin{aligned} M_y &= D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \\ &= \sum_n \sum_m DW_{mn} \left[ \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 + \nu \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] \\ &\quad * \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

Sabiendo que el esfuerzo normal máximo viene dado por, [5]:

$$\sigma_y = \frac{6M_y}{t^2},$$

combinando las fórmulas anteriores se obtiene:

$$\sigma = kP_0 \left( \frac{b}{t} \right)^2 \quad (15)$$

donde:

$$\begin{aligned} k &= \sum_{m \text{ impar}} \sum_{n \text{ impar}} \frac{96}{mn\pi^4} \left( \frac{b}{a} \right)^2 \left\{ \frac{\left( \frac{na}{b} \right)^2 + \nu m^2}{\left[ \left( \frac{mb}{a} \right)^2 + n^2 \right]^2} \right\} \\ &\quad * \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \end{aligned} \quad (16)$$

### Empotrada:

Para resolver este problema Lineal, Timoshenko, [2] y [5], propone superponer la solución de en tres subproblemas:

- i.- Plancha simplemente soportada con carga distribuida uniformemente.
- ii.- Plancha simplemente soportada con momento distribuido en los bordes paralelos al eje x.
- iii.- Plancha simplemente soportada con momento distribuido en los bordes paralelos al eje y.

Nòtese que el primer caso ya fue resuelto en el punto anterior. Se continúa entonces resolviendo el problema de la flexión de una plancha simplemente soportada con momento distribuido en los bordes paralelos al eje x. La ecuación diferencial a resolver es:

$$D\nabla^4 w = 0, \quad (17)$$

con las siguientes condiciones de frontera:

$$\text{para } x=0 \text{ y } x=a: \quad w = 0, \quad w_{,xx} = 0$$

$$\text{para } y = \pm \frac{b}{2}: \quad w = 0, \quad -Dw_{,yy} = f(x),$$

donde  $f(x)$  es la función que describe la distribución de momento.

Una función que satisface la ecuación diferencial parcial homogénea, las condiciones de fronteras en  $x=0$ ,  $x=a$ ,  $y$ ,  $w=0$  en  $y = \pm b/2$  es:

$$w_1(x,y) = \sum_m C_m \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \left[ -\alpha_m \tanh \alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{2a} + \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right]$$

$$\text{donde: } \alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}.$$

Para satisfacer la condición de frontera que se refiere al momento distribuido, se hace una expansión senoidal de la función  $f(x)$ :

$$f(x) = \sum_m M_m \text{sen} \frac{m\pi x}{a}, \quad (18)$$

y las constantes que sirven para satisfacer la condición de frontera en  $y = \pm b/2$  son:

$$C_m = -\frac{M_m}{2D \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \cosh \alpha_m}$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación para la solución de este segundo subproblema, resulta:

$$w_1(x,y) = \sum_{\text{mimpar}} \frac{M_m a^2}{2m^2 \pi^2 D \cosh \alpha_m} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \left[ \alpha_m \tanh \alpha_m \cosh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right] \quad (19)$$

Si se considera ahora una plancha simplemente soportada con momento distribuido en los bordes paralelos al eje y, subproblema 3, por inspección se tiene la siguiente solución:

$$w_2(x,y) = \sum_{\text{mimpar}} \frac{N_m b^2}{2m^2 \pi^2 D \cosh \beta_m} \text{sen} \frac{m\pi y}{b} \left[ \beta_m \tanh \beta_m \cosh \frac{m\pi x}{b} - \frac{m\pi x}{b} \sinh \frac{m\pi x}{b} \right] \quad (20)$$

donde:  $\beta_m = \frac{m\pi a}{2b}$ , y la distribución de momento se expandió en forma similar:

$$g(y) = \sum_m N_m \text{sen} \frac{m\pi y}{b} \quad (21)$$

El método propuesto por Timoshenko obtiene los términos de las expansiones de las distribuciones de los momentos, tratando de satisfacer las condiciones cinemáticas en los bordes, esto es, las pendientes en dirección normal al borde deben ser nulas. Dado que es muy complicado resolver este problema de manera continua, se lo hará en un número discreto de puntos, lo que permitirá obtener igual número de términos de las expansiones de  $f(x)$  y  $g(y)$ .

## 2.6. ANCHO EFECTIVO

En este caso se va a resolver el problema de la variación del esfuerzo normal en el ala formada por la plancha a la cual están soldados los refuerzos, aplicando teoría del Esfuerzo Plano. Se asume una función de esfuerzo de Airy, definida de la siguiente forma, [5]:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (22)$$

De esta forma se satisfacen automáticamente las ecuaciones de

equilibrio. Estableciendo luego una relación de Compatibilidad:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\epsilon_x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\epsilon_y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\gamma_{xy})$$

y reemplazando las expresiones que definen la función esfuerzo de Airy se tiene:

$$\nabla^4 \phi = 0 \quad (23)$$

Una solución de esta ecuación diferencial es:

$$\phi(x, y) = f(y) \cdot \sin \omega x, \quad (24)$$

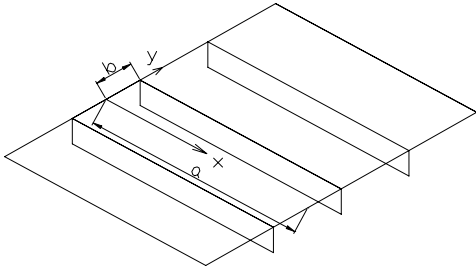
donde  $\omega = n\pi/L$ , siendo n un número entero, y luego de reemplazarla en la ED Parcial, se llega, debido a la igualdad de raíces, a que:

$$f(y) = [(A + C \omega y) \cosh \omega y + (B + D \omega y) \sinh \omega y]$$

Si se considera el caso en que se tiene una serie de refuerzos, las condiciones de frontera son, [4]:

$$\text{Para } x=0 \text{ y } x=a: \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

$$\text{Para } y=0: v = 0, \tau_{xy} = 0, \text{ y, para } y=b: v = 0$$



**Figura 8.-** Plancha con múltiples refuerzos

A lo largo del eje x, debido a la simetría del problema no hay desplazamiento en y (esto es  $\partial v / \partial x = 0$ ), y se puede establecer la siguiente identidad:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\gamma_{xy}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\epsilon_x)$$

Reemplazando la Ley de Hooke y las expresiones que definieron la función esfuerzo de Airy, se llega a:

$$\frac{d^3 f}{dy^3} - \omega^2(2 + \nu) \frac{df}{dy} = 0 \Big|_{y=0}$$

Reemplazando (24), se llega a que existe la siguiente relación entre constantes:

$$\frac{B}{C} = j, \text{ donde: } j = \frac{1 - \nu}{1 + \nu}.$$

De manera que:

$$f(y) = [(A + C \omega y) \cosh \omega y + (Cj + D \omega y) \sinh \omega y]$$

Satisfaciendo ahora la condición de esfuerzo cortante nulo en  $y=0$ , se llega a que  $C=0$ . Finalmente la última condición de no desplazamiento transversal lleva a:

$$D = -\frac{A \tanh \omega b}{\omega b - \left(\frac{1 - \nu}{1 + \nu}\right) \tanh \omega b}$$

Esto a su vez nos lleva a que la solución tiene la forma:

$$f(y) = A \left[ \cos \omega y + \frac{\tanh \omega b}{\omega b - \left(\frac{1 - \nu}{1 + \nu}\right) \tanh \omega b} \sinh \omega y \right]$$

Schade, [4], define el ancho efectivo de la siguiente manera:

$$\lambda = \frac{\int_0^b \sigma_x dy}{\sigma_{x \max}}$$

De manera que en función del esfuerzo en el alma del refuerzo, cada término de la expansión contribuye con:

$$\bar{\lambda}_m = \frac{\int_0^b \sigma_x dy}{\sigma_x^* - \nu \sigma_y^*} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_0^b}{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \nu \omega^2 f \Big|_{y=0}} \quad (25)$$

Finalmente si expandimos la distribución de Momento Flector actuante, con una serie

senoidal:  $M(x) = \sum_m M_m \sin \frac{m\pi x}{a}$ , la

expresión para el ancho efectivo es:

$$\lambda = \frac{X}{\sigma_{\max}} = \frac{\sum \frac{\bar{\lambda}_m M_m \sin \omega x}{S_m}}{\sum \frac{M_m \sin \omega x}{S_m}} \quad (26)$$

Donde X es la fuerza axial desarrollada por la plancha que forma el ala, y  $S_m$  es el módulo Seccional, considerando un ancho efectivo igual a  $\lambda_m$ .

### 3. COMPARACION CON LAS FORMULACIONES DADAS POR DNV, 1991, [1]

A continuación se va a comparar los resultados analíticos obtenidos con las formulaciones recomendadas por DNV para embarcaciones con eslora inferior a 100 metros de 1991. El módulo de Young y la razón de Poisson para el acero se tomarán como  $2.11E4 \text{ kg/mm}^2$  y  $0.30$ , respectivamente.

#### 3.1. FLEXIÓN DE VIGAS (Simplemente Soportadas)

Se va a considerar el caso en que se tienen varios refuerzos separados una distancia  $s$ , y que soportan una cierta carga por unidad de área uniforme. La carga por unidad de longitud sobre cada refuerzo es:  $p_0 = sP$ . Si se quisiera estimar el Módulo Seccional requerido en  $[\text{cm}^3]$ , con la Longitud de la viga en  $[\text{m}]$ , la presión lateral,  $P$ , en  $[\text{kN/m}^2]$ , y el espaciamiento,  $s$ , en  $[\text{m}]$ , se tendría que transformar las unidades, de la siguiente forma, aplicando la ecuación (4):

$$S = \frac{P \left[ \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \times \frac{1000\text{N}}{1\text{kN}} \right] s \left[ \text{m} \times \frac{100\text{cm}}{\text{m}} \right] L^2 [\text{m}^2]}{8 \sigma \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \times \frac{100\text{mm}^2}{\text{cm}^2} \right]}$$

es decir:

$$S = 0.504 p_0 L^2$$

Los refuerzos estructurales en un buque pueden considerarse como primarios, y secundarios. Los primeros soportan a los segundos que a su vez reciben la carga sobre un área de planchaje. La fórmula planteada para analizar el módulo seccional para refuerzos secundarios, *stiffeners*, que podrían tomarse como vigas simplemente soportadas en ambos extremos por DNV, es la siguiente:

For Tween deck frames and vertical peak frames.

$$Z = 0.63 L^2 p s w_k$$

Donde  $w_k$  es el Factor de permisión por corrosión. Es decir existe una relación de  $0.63/0.504=1.25$  entre lo exigido por DNV y lo calculado analíticamente.

#### 3.2. FLEXIÓN DE VIGAS (Empotrada)

La fórmula a utilizar en este caso es:

$$S = \frac{p_0 L^2}{12\sigma} \quad (6)$$

Si se quisiera expresar el Módulo Seccional requerido en  $[\text{cm}^3]$ , la Longitud de la viga en  $[\text{m}]$ , la presión lateral,  $P$ , en  $[\text{kN/m}^2]$ , el espaciamiento entre refuerzos,  $s$ , en  $[\text{m}]$ , y el esfuerzo de trabajo en  $[\text{N/mm}^2]$ , se tendrían que transformar las unidades de la siguiente forma:

$$S = \frac{p_0 \left[ \frac{\text{KN}}{\text{m}} \right] L^2 [\text{m}^2]}{12\sigma \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \frac{\text{KN}}{1000\text{N}} \frac{\text{m}}{100\text{cm}} \frac{100\text{mm}^2}{\text{cm}^2} \right]}$$

Por lo tanto la fórmula resulta:

$$S = \frac{100 p_0 L^2}{1.2\sigma}$$

La fórmula recomendada para seleccionar el Módulo Seccional para refuerzos primarios, *girders*, que se pueden modelar como vigas empotradas en ambos extremos, por DNV, es:

For Single girders

$$Z = \frac{100 L^2 s p}{\sigma}$$

Donde:

Z = Módulo Seccional  $[\text{cm}^3]$ .

L = Longitud de la viga  $[\text{m}]$ .

P = Presión lateral  $[\text{kN/m}^2]$ .

s = Espaciamiento en donde se aplica la carga  $[\text{m}]$ .

$\sigma$  = Esfuerzo local  $160 [\text{N/mm}^2]$

De manera que existe una relación de 1.20 entre lo exigido por DNV y lo calculado analíticamente.

### 3.3. PANDEO DE COLUMNAS

La fórmula para el esfuerzo crítico obtenida analíticamente es:

$$\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2} \quad (9)$$

A continuación se va a transformar las unidades de la siguiente forma:

$$\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 2,11E6 \left[ \frac{Kg}{cm^2} \frac{9,81N}{Kg} \left( \frac{m}{1000mm} \right)^2 \right] [cm^4]}{A [cm^2]^2 [m^2]}$$

Por lo tanto la fórmula resulta:

$$\sigma_{crit} = 204,08 \frac{I}{AL^2} \left[ \frac{N}{mm^2} \right]$$

La fórmula utilizada por DNV, para calcular el esfuerzo crítico de una columna es:

$$\sigma_e = 210 \frac{I_A}{AL^2} \left[ \frac{N}{mm^2} \right],$$

relación válida para Longitudinales.

Donde:

$I_A$ : Momento de Inercia en  $[cm^4]$

A: Área de la sección transversal de los longitudinales en  $[cm^2]$

L: Longitud en  $[m]$

Es decir existe una relación de  $210/204,08=1,03$  entre lo exigido por DNV y lo calculado analíticamente.

### 3.4. PANDEO DE PLANCHAS RECTANGULARES Y SS

La fórmula deducida, ecuación (12), para el esfuerzo crítico es:

$$\sigma_{cri} = \frac{\pi^2 D}{a^2 t} \left[ 1 + \left( \frac{a}{b} \right)^2 \right]^2$$

Para poder expresar el esfuerzo en  $[N/mm^2]$  se realiza la siguiente transformación de unidades:

$$\sigma_{crit} = \frac{\pi^2}{12(1-0,3^2)} 2,11E4 \left[ \frac{Kg}{mm^2} \right] * 9,81 \left[ \frac{N}{Kg} \right] \left( \frac{1m}{1000mm} \right)^2 \left[ 1 + \left( \frac{a}{b} \right)^2 \right]^2$$

Esto es:

$$\sigma_{crit} = 0,187 \frac{t^2}{a^2} \left[ 1 + \left( \frac{a}{b} \right)^2 \right]^2$$

La fórmula utilizada por DNV, para analizar el esfuerzo crítico en una plancha es:

$\sigma_{crit} = \sigma_e$ , cuando  $\sigma_e < 0,5\sigma_y$

$\sigma_{crit} = \sigma_y \left( 1 - \frac{\sigma_y}{4\sigma_e} \right)$ , cuando  $\sigma_e > 0,5\sigma_y$

Donde:

$$\sigma_e = 2,3 \left[ 1 + \left( \frac{s}{l} \right)^2 \right]^2 \left( \frac{t-t_k}{1000s} \right)^2 10^5, [N/mm^2]$$

y a su vez:

s: Espaciamiento entre refuerzos transversales en  $[m]$

l: distancia entre refuerzos longitudinales en  $[m]$

t: espesor de la plancha en  $[mm]$

$t_k$ : espesor adicional a la plancha por corrosión en  $[mm]$

Para éste problema se va a despreciar el espesor adicional por corrosión, además se va a considerar que la plancha falla por Estabilidad, es decir, pandea (en el argot de columnas, se estaría considerando una columna esbelta). De manera que la fórmula de DNV para estimar el esfuerzo crítico de una plancha luce de la siguiente manera:

$$\sigma_e = 0,23 \left[ 1 + \left( \frac{s}{l} \right)^2 \right]^2 t^2, [N/mm^2]$$

Es decir, el esfuerzo crítico de acuerdo con DNV es 1.23 veces mayor que el obtenido considerando que la plancha está simplemente soportada.

### 3.5. FLEXIÓN DE PLANCHAS RECTANGULARES

**Simplemente Soportadas:** La fórmula deducida analíticamente para evaluar el esfuerzo máximo en una plancha rectangular simplemente soportada en sus bordes y sometida a carga uniformemente distribuida es:

$$\sigma = kP_0 \left(\frac{b}{t}\right)^2 \quad (15)$$

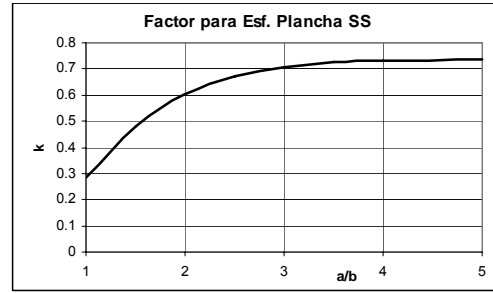
Donde:

$$k = \sum_m \sum_n \frac{96}{mn\pi^4} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left\{ \frac{\left(\frac{na}{b}\right)^2 + vm^2}{\left[\left(\frac{mb}{a}\right)^2 + n^2\right]^2} \right\} * \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

Para comprobar la convergencia de la expansión, se evaluó y graficó esta doble sumatoria para diferentes razones de aspecto, y, números enteros m y n. Luego se los ha sumado, truncando la serie, habiéndose comprobado la convergencia de la expansión, véase la Tabla 1.

m	n	a/b			
		1.0	2.0	3.0	4.0
1	1	0.3203	0.6780	0.8249	0.8894
1	3	-0.0306	-0.0348	-0.0357	-0.0361
1	5	0.0074	0.0078	0.0078	0.0079
1	7	-0.0028	-0.0028	-0.0029	-0.0029
3	1	-0.0122	-0.0521	-0.1068	-0.1573
3	3	0.0040	0.0084	0.0102	0.0110
3	5	-0.0016	-0.0023	-0.0025	-0.0025
3	7	0.0007	0.0009	0.0009	0.0009
5	1	0.0025	0.0108	0.0253	0.0441
5	3	-0.0009	-0.0031	-0.0047	-0.0056
5	5	0.0005	0.0011	0.0013	0.0014
5	7	-0.0003	-0.0005	-0.0005	-0.0005
7	1	-0.0009	-0.0037	-0.0089	-0.0164
7	3	0.0003	0.0013	0.0024	0.0032
7	5	-0.0002	-0.0006	-0.0008	-0.0009
7	7	0.0001	0.0003	0.0003	0.0004
Σ:		0.2864	0.6086	0.7104	0.7361

**Tabla 1.-** Constante k en función de la razón de aspecto de la plancha



**Figura 9.-** Constante k en función de la razón de aspecto de la plancha

Se escogió el valor de k máximo del gráfico anterior, y se despejó el espesor requerido para que la plancha desarrolle un cierto nivel de esfuerzo. Además transformando unidades resulta:

$$t = b[m] \sqrt{\frac{0,736 * p \left[ \frac{KN}{m^2} \right] * \left[ \frac{1000N}{KN} \right]}{\sigma \left[ \frac{N}{mm^2} \right]}}$$

$$t = 27.13 b[m] \sqrt{\frac{p[kN/m^2]}{\sigma[N/mm^2]}}, \quad [mm]$$

**Empotrada:**

La fórmula empleada para evaluar el esfuerzo máximo es la misma que en el caso SS:

$$\sigma = kP_0 \left(\frac{b}{t}\right)^2,$$

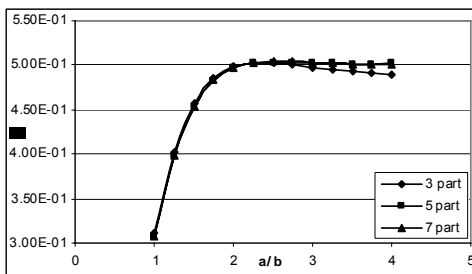
donde:  $k = \frac{6M}{P_0 b^2}$ .

Primero se comparan los resultados de diferentes número de evaluaciones de la condición cinemática sobre los ejes, como se muestra en la siguiente tabla:

a/b	k		
	3 evaluac.	5 evaluac.	7 evaluac.
1	0.3107	0.3074	0.3082
1.25	0.4017	0.3978	0.3989
1.5	0.4569	0.4531	0.4543
1.75	0.4856	0.4825	0.4838
2	0.4984	0.4963	0.4976
2.25	0.5025	0.5018	0.5030
2.5	0.5023	0.5032	0.5043
2.75	0.5001	0.5031	0.5039
3	0.4975	0.5025	0.5029
3.25	0.4949	0.5020	0.5019
3.5	0.4927	0.5017	0.5011
3.75	0.4909	0.5016	0.5005
4	0.4895	0.5018	0.5001

**Tabla 2.-** Constante k en función de la razón de aspecto de la plancha

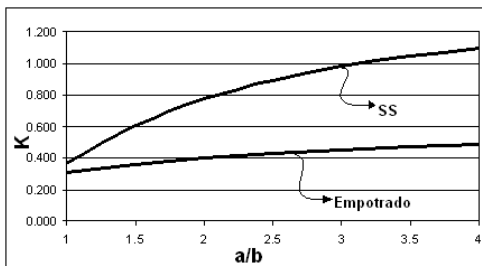
Graficando, estos resultados se tiene:



**Figura 10.-** La constante k en función de la razón de aspecto de la plancha

Se nota que con 7 puntos, se ha logrado una convergencia aceptable, para el rango analizado de razón de aspecto de la plancha. Además, dicho coeficiente tiende a un valor máximo igual a 0.50, conforme la razón de aspecto de la plancha se incrementa. Aplicando finalmente igual manejo dimensional que en el caso SS, usando el valor mencionado para k:

$$t = 22.36 b [m] \sqrt{\frac{p [kN/m^2]}{\sigma [N/mm^2]}}, [mm]$$



**Figura 11.-** Comparación de la solución analítica para planchas SS y Empotradas.

DNV recomienda la siguiente fórmula:

$$t = 15.8s \sqrt{\frac{P}{\sigma}} [mm]$$

en la que s es el espaciamiento entre refuerzos, en [m], P es la presión hidrodinámica en, [kN/m<sup>2</sup>], y, σ es el esfuerzo de trabajo en [N/mm<sup>2</sup>].

### 3.7. ANCHO EFECTIVO

Cada término de la expansión de la fórmula para calcular el ancho efectivo, (25), para el caso de múltiples refuerzos es, [4]:

$$\bar{\lambda}_m = \frac{4}{\alpha} \frac{\cosh \alpha - 1}{(3 - \nu)(1 + \nu) \sinh \alpha - (1 + \nu)^2 \alpha}$$

A continuación se desarrollaron las expansiones algebraicas, tomando como referencia un valor de cL/B=3.0, y luego se sumaron de acuerdo a la ecuación (26):

$$\lambda = \frac{\sum \frac{\bar{\lambda}_m M_m \sin \omega x}{S_m}}{\sum \frac{M_m \sin \omega x}{S_m}} \quad (26)$$

Los resultados se presentan en la siguiente tabla :

m	ω	α	λ <sub>bar m</sub> /b	S <sub>m</sub>	Numer.	Denom.
1	1.047	1.047	0.877	0.0091	-12.428	-14.177
3	3.142	3.142	0.383	0.0042	0.440	1.148
5	5.236	5.236	0.221	0.0025	-0.090	-0.405
7	7.330	7.330	0.156	0.0019	0.031	0.199
9	9.425	9.425	0.121	0.0015	-0.014	-0.115
11	11.519	11.519	0.099	0.0013	0.007	0.073
13	13.614	13.614	0.084	0.0012	-0.004	-0.050
15	15.708	15.708	0.073	0.0011	0.003	0.036
17	17.802	17.802	0.064	0.0010	-0.002	-0.027
19	19.897	19.897	0.057	0.0009	0.001	0.021
21	21.991	21.991	0.052	0.0009	-0.001	-0.016
					Σ:	-12.06
					λ/b:	0.9056

**Tabla 3.-** Convergencia del cálculo del ancho efectivo en x/L=0.50, cL/B=3.0, para carga uniforme con extremos SS

Como se nota en las últimas filas, la contribución de los últimos términos es muy pequeña, comparada con los primeros, de manera que se considera que se ha logrado una convergencia aceptable.

Schade, [4], concluye que para el caso de múltiples refuerzos sopotando carga uniforme, la solución puede tomarse con un razonable nivel de seguridad como:

$$\lambda = \frac{1,1b}{1 + \frac{2}{\left(\frac{cL}{B}\right)^2}} \quad (27)$$

donde:

cL = Espacio entre puntos con momento flector nulo

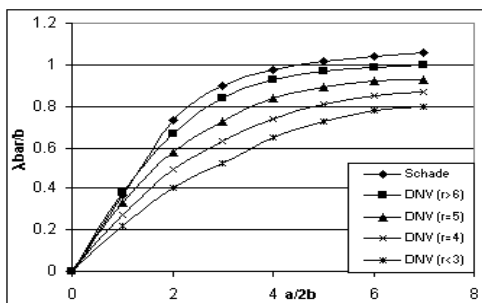
B = Ancho del refuerzo

$\lambda$  = Ancho efectivo

Utilizando esta última expresión se obtiene un valor de 0.90 para la razón de ancho efectivo, y dado que la diferencia es pequeña (analíticamente es 0.9056), se va a usar esta última expresión para comparar los resultados analíticos con los que recomienda DNV. La sociedad de clasificación establece el ancho efectivo en función de la razón de aspecto de la plancha y para r, el número de refuerzos, que se reproduce en la siguiente tabla, junto con los resultados de aplicar la fórmula (27):

a/(2b)	Schade	DNV (r>6)	DNV (r=5)	DNV (r=4)	DNV (r<3)
0	0	0	0	0	0
1	0.367	0.38	0.33	0.27	0.22
2	0.733	0.67	0.58	0.49	0.4
3	0.900	0.84	0.73	0.63	0.52
4	0.978	0.93	0.84	0.74	0.65
5	1.019	0.97	0.89	0.81	0.73
6	1.042	0.99	0.92	0.85	0.78
7	1.057	1	0.93	0.87	0.8
	relación:	0.955	0.857	0.757	0.659

**Tabla 4.-** Comparación del ancho efectivo según DNV con la fórmula de Schade



**Figura 12.-** Ancho efectivo en función de la razón de aspecto de la plancha

#### 4. COMENTARIOS FINALES

Se ha revisado el proceso de solución analítica de algunos problemas estructurales clásicos. Luego del manejo dimensional correspondiente, las expresiones resultantes se las ha comparado con las formulaciones dadas por las reglas de la sociedad de clasificación DNV de 1991. En general se muestra la correspondencia entre los resultados analíticos y las reglas de la sociedad clasificadora mencionada.

En el caso de la flexión de refuerzos, se puede establecer que DNV recomienda alcanzar niveles de esfuerzo inferiores al máximo establecido por las soluciones analíticas. La relación es 1.20:1.

En el caso de las formulaciones para la carga crítica de columnas, básicamente coinciden, considerando sus extremos como simplemente soportados. Sin embargo, al soldar el refuerzo longitudinal en los extremos, la carga crítica se va a elevar, incrementándose el factor de seguridad. En el caso del esfuerzo crítico de planchas, asumidas como simplemente soportadas, se tiene una relación de aproximadamente 1:1.2, respecto del establecido analíticamente; no debe olvidarse que otra vez, al soldar la plancha la rigidez de los bordes se incrementa sobre el caso simplemente soportado.

En el caso de flexión de planchas, el espesor requerido por DNV es menor que el requerido según las formulaciones analíticas. Sin embargo debe notarse que el esfuerzo de trabajo que recomiendan en las reglas, 140-160, está por debajo del esfuerzo de Fluencia del acero estándar, 235 N/mm<sup>2</sup>.

Finalmente en el caso del cálculo del Ancho Efectivo del ala del conjunto refuerzo + plancha asociada, sometida a carga lateral, se observa en la figura 12 que la solución analítica tiene un comportamiento similar a las recomendaciones de DNV. Se nota que conforme se incrementa el número de refuerzos, las dos relaciones se acercan. Esto es razonable ya que en el límite, cuando el número de refuerzos sea extremo, las condiciones de frontera corresponderían a las asumidas.

## 5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] DNV, Hull Structural Design-Ships with Length less than 100 metres. Det Norske Veritas, 1991.

[2] Muckle, W., Strength of Ships' Structures. E. Arnold Ltd., Londres, 1967

[3] Popov, E., Introducción a la Mecánica de Sólidos. Limusa, México, 1992

[4] Schade, H., The Effective Breadth of Stiffened Plating Under Bending Loads. SNAME, Transacciones, 1951.

[5] Timoshenko, W., Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, New York, 1953.